1. feladatsor, megoldások

1. $\mathbb{P}(AB+\overline{C}) = \mathbb{P}(AB) + \mathbb{P}(\overline{C}) - \mathbb{P}(AB\overline{C}) = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} + \frac{3}{4} - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4} = \frac{7}{9}$.

2. **Első megoldás.** Jelentse A azt az eseményt, hogy az első két gyerek fiú, B pedig azt, hogy 3 fiú és 4 lány van. Ha p valószínűséggel születik fiú, akkor
$$\frac{\mathbb{P}(AB)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{p^2\cdot\binom{5}{1}p^1(1-p)^4}{\binom{7}{3}p^3(1-p)^4} = \frac{1}{7}.$$
Második megoldás. A három fiú születési sorszáma egyforma valószínűséggel lehet bármelyik három hely a hét közül. Ha ezek közül csak azokat számoljuk, amelyekben az első két gyerek fiú, akkor ez öt lehetőség, tehát a keresett valószínűség $\frac{5}{\binom{7}{3}}$.

3. Ha egy A esemény minden eseménytől független, akkor független önmagától is: $\mathbb{P}(AA) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(A)$ és ez csak úgy lehet igaz, ha $\mathbb{P}(A)$ vagy 0 vagy 1. Ha $\mathbb{P}(A) = 0$, akkor ha B tetszőleges esemény, akkor $\mathbb{P}(AB) \le \mathbb{P}(A) = 0$, tehát függetlenek. Hasonlóan intézhető el a $\mathbb{P}(A) = 1$ eset is.

4. Jelentse A azt, hogy a lap piros, B azt, hogy az illető azt mondja, hogy piros. A Bayes tétel alapján
$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(B|A)\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B|A)\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B|\overline{A})\mathbb{P}(\overline{A})} = \frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}}{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}+\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}} = \frac{1}{7}.$$

5. $$\mathbb{P}(X+Y<0.5) = \int_0^{0.5}\int_0^{0.5-x} 24xy\; dy\; dx = \frac{1}{16} = 0.0625.$$